代数幾何学シンポジウム記録
1998年度 pp.10-16

有限生成体上の算術的高さ関数

京都大学大学院理学研究科数学教室
森脇 淳

この解説の詳しいことは，http://xxx.lanl.gov/ の math.NT/9809016 にある
Atushi Moriwaki, Arithmetic height functions over finitely generated fields
を参照して下さい．

1. 動機

F を標数 0 の代数閉体，A を F 上定義されたアーベル多様体，X を A の部分多様体とする．このとき，次のレイノウ (Raynaud) の定理（マニン-マンフォード (Manin-Mumford) 予想）がある．

定理 1.1 (cf. [5], [6]). $X(F) \cap A(F)_{tor}$ が X の中でザリスキ位相で稠密なら，X は A の部分アーベル多様体のねじれ点(*torsion point*)による平行移動である．

さらに，$F = \overline{\mathbb{Q}}$ のとき，次のボゴモロフ (Bogomolov) 予想が最近ウルモ (Ullmo) と張 (Zhang) によって証明された．

定理 1.2. $F = \overline{\mathbb{Q}}$ とし，L を A 上の対称的(*symmetric*)で豊富(*ample*)な直線束とする．このとき，もし，すべての $\epsilon > 0$ に対して，$\{x \in X(F) \mid \hat{h}_L(x) \leq \epsilon\}$ が X の中でザリスキ位相で稠密なら，X は A の部分アーベル多様体のねじれ点による平行移動である．ここで，$\hat{h}_L$ は L に付随する標準的高さ関数(ネロン-テート (*Néron-Tate*) の高さ関数) である．

もちろん，$F = \overline{\mathbb{Q}}$ のとき，定理 1.2 は定理 1.1 を導く．そこで，定理 1.1 を完全に導く定理 1.2 の拡張が可能かという問題が自然に生じる．簡単なことであるが，K が $\mathbb{Q}$ 上有限生成な体で，$F = \overline{K}$ となる場合に，定理 1.2 を拡張すれば十分である．ただ，この拡張を安直に行うと，次のように失敗する．簡単のため $\operatorname{tr.deg}_{\mathbb{Q}}(K) = 1$ とする．このとき，ある代数体 k と 関数体が K となる k 上の非特異な射影曲線 C が存在する．C の点から生じる非アルキメデス的付値を用いて，標準的な幾何学的高さ関数

$$\hat{h}^{geom} : A(\overline{K}) \to \mathbb{R}$$

が定義される．いま，A の (K/k)-跡 ((K/k)-trace) B が自明でないとし，x を $B(\overline{k}) \setminus B(\overline{k})_{tor}$ から選ぶ．ここで $X = \{x\}$ とおくと，$\hat{h}^{geom}(x) = 0$ であるので，すべての $\epsilon > 0$ に対して，$\{x \in X(F) \mid \hat{h}_L(x) \leq \epsilon\}$ が X の中でザリスキ位相で稠密であるが，X は A の部分アーベル多様体のねじれ点による平行移動でない．

本講演の目的は，任意の $\mathbb{Q}$ 上の有限生成の体上のアーベル多様体にしかるべき高さ関数を定義し，その高さ関数について定理 1.2 の拡張をすることにある．つまり，次の定理を解説することにある．

Date: 18/Nov/1998, 0:40PM (JP).

定理 1.3. K を $\mathbb{Q}$ 上の有限生成の体，$F = \overline{K}$，L を A 上の対称的で豊富な直線束とする．このとき，次を満たす双線形写像

$$\langle\ ,\ \rangle_L : A(F) \times A(F) \to \mathbb{R}$$

が存在する．

(1) $\langle\ ,\ \rangle_L$ は対称的である．つまり，$\langle x, y\rangle_L = \langle y, x\rangle_L$ である．
(2) $\langle x, x\rangle_L \geq 0$ がすべての $x \in A(F)$ について成り立ち，$\langle x, x\rangle_L = 0$ が成り立つための必要十分条件は $x \in A(F)_{tor}$ である．

さらに，$\|\cdot\|_L = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle_L}$ についてボゴモロフ予想が成立する．つまり，もし，すべての $\epsilon > 0$ に対して，$\{x \in X(F) \mid \|x\|_L \leq \epsilon\}$ が X の中でザリスキ位相で稠密なら，X は A の部分アーベル多様体のねじれ点による平行移動である．

2. アラケロフ幾何から

ここでは，あとで必要になるアラケロフ幾何の復習をする．アラケロフ幾何の基本的な事項は，[1] や [7] にあります．

2.1. **数論的多様体.** 数論的多様体 (arithmetic variety) とは，$\mathbb{Z}$ 上の平坦で準射影的 (quasi-projective) である整 (integral) なスキームをいう．数論的多様体が生成的にスムーズ (generically smooth) であるとは，$\mathbb{Q}$ 上スムーズ (smooth) になるときにいう．

2.2. **数論的な周群.** X を生成的にスムーズな数論的多様体とする．ゼロ以上の整数 p に対して，数論的な余次元 p のサイクル (cycle) とは次のような対 (Z, g) である．Z は X の余次元 p のサイクルで g は $X(\mathbb{C})$ 上の型が $(p-1, p-1)$ のカレント (current) である．ここで注意してほしいのは，ジレ-スレ (Gillet-Soulé) の定義と違って Z と g の間に何の関係も設定していないことである．数論的な余次元 p のサイクル全体を $\widehat{Z}^p_D(X)$ で表すことにする．$\widehat{Z}^p_D(X)$ を適当な同値関係，すなわち，数論的な有理同値関係で割った群を $\widehat{\mathrm{CH}}^p_D(X)$ と書くことにする．X が射影的なとき，$\widehat{\deg} : \widehat{\mathrm{CH}}_D^{\dim X_{\mathbb{Q}}+1}(X) \to \mathbb{R}$ を

$$\widehat{\deg}\left(\sum_P n_P P,\ T\right) = \sum_P n_P \log \#(\mathcal{O}_X/\mathfrak{m}_P) + \frac{1}{2}\int_{X(\mathbb{C})} T$$

で定める．ここで，$\mathfrak{m}_P$ は P での極大イデアルで，$\mathcal{O}_X/\mathfrak{m}_P$ は有限体であることに注意する．

2.3. **数論的多様体上のエルミート直線束とそのチャーンクラス.** X を生成的にスムーズな数論的多様体とする．$\overline{L} = (L, \|\cdot\|)$ が X 上の C^∞-エルミート直線束とは L が X 上の直線束で，$\|\cdot\|$ が $X(\mathbb{C})$ 上で $L_{\mathbb{C}}$ の C^∞-エルミート計量を与えるときにいう．$\overline{L}$ のチャーンクラス $\widehat{c}_1(\overline{L})$ は次のように定められる．s をゼロでない L の有理切断とする．このとき，$(\mathrm{div}(s), -\log\|s\|^2)$ は $\widehat{\mathrm{CH}}^1_D(X)$ の中で，s のとり方に依らない．これが，$\widehat{c}_1(\overline{L})$ である．

2.4. **エルミート直線束の数論的交点数.** X を数論的多様体とする．しらばらくの間，X は生成的にスムーズとする．X 上の C^∞-エルミート直線束 $\overline{L}$ に対して，順同型

$$\widehat{c}_1(\overline{L})\cdot : \widehat{\mathrm{CH}}^p_D(X) \to \widehat{\mathrm{CH}}^{p+1}_D(X)$$

を次のように定義する．(Z,g) を $\widehat{Z}^p_D(X)$ の元とする．上の順同型は線形的に定義するので，Z は整なスキームとしてよい．t をゼロでない $L|_Z$ の有理切断とする．このとき，

$$\widehat{c}_1(\overline{L})\cdot(Z,g)=(\mathrm{div}(t),[-\log\|t\|_Z^2]+c_1(\overline{L})\wedge g)$$

と定める．ここで，$[-\log\|t\|_Z^2]$ は$\phi\mapsto\int_{Z(\mathbb{C})}(-\log\|t\|_Z^2)\phi$ で定まるカレントである．

さて，$\overline{L}_1,\dots,\overline{L}_{d+1}$ を $d+1$ 個の X 上の C^∞-エルミート直線束とする．ここで，$d=\dim X_{\mathbb{Q}}$ である．このとき，

$$\widehat{c}_1(\overline{L}_1)\cdots\widehat{c}_1(\overline{L}_{d+1})\in\widehat{\mathrm{CH}}^{d+1}(X)$$

が定まる．特に，X が射影的なとき，$\widehat{\deg}\left(\widehat{c}_1(\overline{L}_1)\cdots\widehat{c}_1(\overline{L}_{d+1})\right)$ が定まるが，これを算術的交点数という．

次に，X は射影的であるが，必ずしも生成的にスムーズでない場合を考えよう．$\overline{L}=(L,\|\cdot\|)$ を X 上の連続的なエルミート直線束とする．$\overline{L}$ が C^∞ であるとは，任意の複素多様体 M と任意の解析的写像 $f:M\to X(\mathbb{C})$ に対して，$f^*(L_{\mathbb{C}},\|\cdot\|)$ が C^∞-エルミート直線束になるときにいう．さて，$\overline{L}_1,\dots,\overline{L}_{d+1}$ を $d+1$ 個の X 上の C^∞-エルミート直線束とする．広中の特異点解消定理を用いると，射影的な数論的多様体の間の双有理写像 $\mu:Y\to X$ で Y が生成的にスムーズとなるものが存在する．このとき，$\widehat{\deg}\left(\widehat{c}_1(\mu^*\overline{L}_1)\cdots\widehat{c}_1(\mu^*\overline{L}_{d+1})\right)$ は μ のとり方に依らないことが射影公式 (projection formula) 容易に確かめられる．そこで，これを $\widehat{\deg}\left(\widehat{c}_1(\overline{L}_1)\cdots\widehat{c}_1(\overline{L}_{d+1})\right)$ とかき，X 上の算術的交点数とよぶことにする．

2.5. エルミート直線束の正値性. ここでは，エルミート直線束のいろいろな正値性について考える．X を射影的な数論的多様体とし，$\overline{L}$ を X 上の C^∞-エルミート直線束とする．

(豊富) : $\overline{L}$ が豊富 (ample) であるとは，以下を満たすときにいう．

(1) L は X 上で豊富である．
(2) $c_1(\overline{L})$ は $X(\mathbb{C})$ の稠密な開集合上で半正定値である．
(3) ある正の整数 n が存在して，$H^0(X,L^{\otimes n})$ は $\{s\in H^0(X,L^{\otimes n})\mid\|s\|_{sup}<1\}$ で生成される．

(垂直的にネフ) : $\overline{L}$ が垂直的にネフ (vertically nef) であるとは，以下を満たすときにいう．

(1) L は $X\to\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ についてネフである．
(2) $c_1(\overline{L})$ は $X(\mathbb{C})$ の稠密な開集合上で半正定値である．

(水平的にネフ) : $\overline{L}$ が水平的にネフ (horizontally nef) であるとは，任意の $\mathbb{Z}$ 上平坦である 1 次元の X の整な部分スキーム C に対して，$\widehat{\deg}\left(\overline{L}|_C\right)\geq 0$ が成立するときにいう．

(ネフ) : $\overline{L}$ が垂直的にネフかつ水平的にネフであるとき，ネフとよぶ．

(ビック) : $\overline{L}$ がビック (big) であるとは，以下を満たすときにいう．

(1) $L_{\mathbb{Q}}$ は $X_{\mathbb{Q}}$ 上ビックである．
(2) ある正の整数 n とゼロでない切断 $s\in H^0(X,L^{\otimes n})$ が存在して，$\|s\|_{sup}<1$ が成り立つ．

$\overline{L}$ がビックであるための必要十分条件は，任意の X 上の C^∞-エルミート直線束 $\overline{M}$ に対して，ある正の整数 n とゼロでない切断 $s\in H^0(X,L^{\otimes n}\otimes M)$ が存在して，$\|s\|_{sup}<1$ が成り立つことである．

3. 有限生成体上の算術的高さ関数

3.1. 有限生成体の偏極. K を $\mathbb{Q}$ 上有限生成である体とする．次のような対 $(B,\overline{H})$ を K の偏極 (polarization) であるという．B は射影的の数論的多様体で，$\overline{H}$ は B 上のネフな C^∞-エルミート直線束であり，B の関数体は K である．

3.2. 算術的高さ関数の定義と諸性質. K を $\mathbb{Q}$ 上有限生成である体とし，$d = \mathrm{tr.deg}_{\mathbb{Q}}(K)$ とおく．$\overline{B} = (B,\overline{H})$ を K の偏極とする．X を K 上の射影的な代数多様体とし，L を X 上の直線束とする．次のような対 $(\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}})$ を (X,L) の C^∞-モデルという．$\mathcal{X}$ は射影的な数論的多様体で，$\overline{\mathcal{L}}$ は $\mathcal{X}$ 上の C^∞-エルミート直線束であり，スキームの射 $\mathcal{X} \to B$ が存在して，X は $\mathcal{X} \to B$ の生成ファイバー (generic fiber) で，L は $\mathcal{L}$ を生成ファイバーに制限したものである．$P \in X(\overline{K})$ に対して，$\mathrm{Spec}(\overline{K}) \xrightarrow{P} X \hookrightarrow \mathcal{X}$ の閉包を Δ_P で記すことにする．これに対して，

$$h^{\overline{B}}_{(\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}})} : X(\overline{K}) \to \mathbb{R}$$

を

$$h^{\overline{B}}_{(\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}})}(P) = \frac{1}{[K(P):K]}\widehat{\deg}\left(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}|_{\Delta_P})\cdot\widehat{c}_1(f^*\overline{H}|_{\Delta_P})^d\right),$$

と定義する．ここで f は $\mathcal{X} \to B$ の自然な射である．このとき，次のことがわかる．

命題 3.2.1. $\mathrm{Supp}\,(\mathrm{Coker}(H^0(X,L)\otimes\mathcal{O}_X \to L))$ を $\mathrm{Bs}(L)$ で表すことにする．このとき，ある定数 C が存在して，$h^{\overline{B}}_{(\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}})}(P) \geq C$ がすべての $P \in (X \setminus \mathrm{Bs}(L))(\overline{K})$ について成立する．

このことから，直ちにつぎの系を得る．

系 3.2.2. $(\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}})$ と $(\mathcal{X}',\overline{\mathcal{L}}')$ を (X,L) のふたつの C^∞-モデルとする．このとき，ある正の定数 C が存在して

$$|h^{\overline{B}}_{(\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}})}(P) - h^{\overline{B}}_{(\mathcal{X}',\overline{\mathcal{L}}')}(P)| \leq C$$

がすべての $P \in X(\overline{K})$ について成立する．

上の系の意味するところは，$h^{\overline{B}}_{(\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}})}$ は $X(\overline{K})$ 上の有界関数全体をモジュロー (modulo) にすれば，(X,L) の C^∞-モデルの取り方に依らずに一意的に定まるということである．したがって，$h^{\overline{B}}_{(\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}})}$ を通常の高さ関数と同様に $h^{\overline{B}}_L$ と書くことにする．

注意 3.2.3. $(X,L) = (\mathbb{P}^n,\mathcal{O}(1))$ のとき，$P \in X(K)$ に対して，$h^{\overline{B}}_L(P)$ は次のように表される．$P = (x_0,\dots,x_n)$ $(x_1,\dots,x_n \in K)$ と表すと，

$$h^{\overline{B}}_L(x_0,\dots,x_n) = \sum_{\Gamma}\max_i\{-\mathrm{ord}_\Gamma(x_i)\}\widehat{\deg}\left(\widehat{c}_1(\overline{H}|_\Gamma)^d\right) + \int_{B(\mathbb{C})}\log\left(\max_i\{|x_i|\}\right)c_1(\overline{H})^d$$

である．ここで Γ はあらゆる B 上の素因子上を動く．

3.3. **ノースコットの定理.** ここで，定義した高さ関数の著しい特徴の一つとして次の代数体上のノースコット (Northcott) の定理が K 上でも成立することにある．

定理 3.3.1. K を $\mathbb{Q}$ 上有限生成な体で $\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{Q}}(K) = d$ とする．さらに，$\overline{B} = (B, \overline{H})$ を K の偏曲とする．X を K 上定義された射影多様体で，L を X 上の豊富な直線束とする．このとき，もし $\overline{H}$ がネフかつビックであるなら，任意の数 M と任意の正の整数 e に対して，次の集合

$$\{P \in X(\overline{K}) \mid h_L^{\overline{B}}(P) \leq M, \quad [K(P):K] \leq e\}$$

は有限集合である．

3.4. **アーベル多様体上の標準的高さ関数.** K を $\mathbb{Q}$ 上有限生成の体，$\overline{B} = (B, \overline{H})$ を K の偏極とする．さらに，A を K 上のアーベル多様体, L を A の直線束とする．このとき，立方定理と命題 3.2.1 により，

$$h_L^{\overline{B}}(x+y+z) - h_L^{\overline{B}}(x+y) - h_L^{\overline{B}}(y+z) - h_L^{\overline{B}}(z+x) + h^{\overline{B}}(x) + h_L^{\overline{B}}(y) + h_L^{\overline{B}}(z)$$

は $A(\overline{K}) \times A(\overline{K}) \times A(\overline{K})$ 上の有界関数になる．したがって，[3, Chapter 5, §1] によれば，次を満たすような双線形写像 $q_L^{\overline{B}} : A(\overline{K}) \times A(\overline{K}) \to \mathbb{R}$ と線形写像 $l_L^{\overline{B}} : A(\overline{K}) \to \mathbb{R}$ が一意的に存在する．

$$h_L^{\overline{B}}(x) = q_L^{\overline{B}}(x,x) + l_L^{\overline{B}}(x) + O(1).$$

実際，$q_L^{\overline{B}}(x,x)$ と $l_L^{\overline{B}}(x)$ は次の式で与えられる．

$$q_L^{\overline{B}}(x,x) = \lim_{n\to\infty} 2^{-2n} h_L^{\overline{B}}(2^n x), \qquad l_L^{\overline{B}}(x) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n}\left(2^{-2n} h_L^{\overline{B}}(2^n x) - q_L^{\overline{B}}(x,x)\right).$$

以後 $q_L^{\overline{B}} + l_L^{\overline{B}}$ を $\hat{h}_L^{\overline{B}}$ と記し，L の偏極 $\overline{B}$ に関する標準的高さ関数と呼ぶことにする．このとき，次の命題が成立する．(特に，(3) は定理 3.3.1 の系である．)

命題 3.4.1. L を対称的でかつ豊富であるとする．このとき，次が成り立つ．

(1) $\hat{h}_L^{\overline{B}}(x) \geq 0$ がすべての $x \in A(\overline{K})$ で成り立つ．
(2) x がねじれ点であるなら，$\hat{h}_L^{\overline{B}}(x) = 0$ である．
(3) $\overline{B} = (B, \overline{H})$ とおくとき，$\overline{H}$ がネフかつビックと仮定する．このとき，$\hat{h}_L^{\overline{B}}(x) = 0$ であるための必要十分条件は x がねじれ点であることである．

3.5. **高さ関数の交点数による評価.** K を $\mathbb{Q}$ 上有限生成の体で，$d = \mathrm{tr.deg}_{\mathbb{Q}}(K)$ とおく．さらに，$\overline{B} = (B, \overline{H})$ を K の偏極とする．また，X を K 上の e-次元射影代数多様体，L を X 上の直線束とする．ここで，(X, L) の C^∞-モデル $(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}})$ を固定する．自然な射 $\mathcal{X} \to B$ を π で表すことにする．このとき，次が成立する．

定理 3.5.1. $\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{H})^{d+1}) = 0$，$\deg(H_{\mathbb{Q}}^d) > 0$ であり，ある有理数 a について $\overline{\mathcal{L}} + a\pi^*(\overline{H})$ が垂直的にネフで $(\mathcal{L} + a\pi^*(H))_{\mathbb{Q}}$ が $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ 上豊富であると仮定する．このとき，次の不等式が成り立つ．

$$\sup_{Y \subsetneq X}\left\{\inf_{x \in (X\setminus Y)(\overline{K})} h^{\overline{B}}_{(\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}})}(x)\right\} \geq \frac{\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{e+1} \cdot \widehat{c}_1(\pi^*(\overline{H}))^d)}{(e+1)\deg(\mathcal{L}_K^e)} \geq \inf_{x \in X(\overline{K})} h^{\overline{B}}_{(\mathcal{X},\overline{\mathcal{L}})}(x).$$

この定理を証明するための重要な鍵となるのは，ファルチングス (Faltings)，ジレ-スレ，及び，張による次の定理である．(cf. [10, Theorem 1.4]).

定理 3.5.2. B を射影的な数論的多様体で，$d = \dim B_{\mathbb{Q}}$ とする．また，$\overline{L}$ を B 上の C^∞-エルミート直線束とする．もし $\overline{L}$ が垂直的にネフであり，$L_{\mathbb{Q}}$ が $B_{\mathbb{Q}}$ 上で豊富であり，かつ，$\widehat{\deg}\left(\widehat{c}_1(\overline{L})^{d+1}\right) > 0$ であるなら，$\overline{L}$ はビックである．

3.6. **同程度分布の定理.** K を $\mathbb{Q}$ 上有限生成の体で，$d = \operatorname{tr.deg}_{\mathbb{Q}}(K)$ とし，$\overline{B} = (B, \overline{H})$ を K の偏極とする．さらに，X を K 上の e-次元の射影代数多様体とする．

$X(\overline{K})$ の元からなる列 $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ が生成的であるとは，$\{x_m\}$ の任意の部分列が X でザリスキ位相で稠密であるときにいう．

さて，L を X 上の直線束とし，$(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}})$ を (X, L) の C^∞-モデルとする．このとき，次の同程度分布の定理 (equidistribution theorem) が成立する．これは，スピロ-ウロモ-張 (Szpiro-Ullmo-Zhang) の結果の一般化である．(cf. [8], [9] and [11])．

定理 3.6.1. $\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{H})^{d+1}) = 0$ で$\deg(H_{\mathbb{Q}}^d) > 0$ であると仮定する．$h : X(\overline{K}) \to \mathbb{R}$ を L と $\overline{B}$ に付随する高さ関数とし，すべての $x \in X(\overline{K})$ について $h(x) \geq 0$ であるとする．さらに，以下を満たす B 上の射影的な数論多様体の列 $\{\mathcal{X}_n\}$ と $\mathcal{X}_n$ 上の C^∞-エルミート $\mathbb{Q}$-直線束 $\overline{\mathcal{L}}_n$ が存在すると仮定する．

(1) B のザリスキ開集合 U が存在して，$(\mathcal{X}_n)_U = \mathcal{X}_U$ がすべての n について成り立つ．
(2) $\sup_{x \in X(\overline{K})} |h(x) - h^{\overline{B}}_{(\mathcal{X}_n, \overline{\mathcal{L}}_n)}(x)|$ は，$n \to \infty$ のとき，0 に収束する．
(3) $n \gg 0$ のとき，$\overline{\mathcal{L}}_n$ は垂直的にネフで，$(\mathcal{L}_n)_{\mathbb{Q}}$ は $(\mathcal{X}_n)_{\mathbb{Q}}$ 上で豊富である．
(4) $U(\mathbb{C})$ の連結な開集合 W と $\pi^{-1}(W)$ 上の正定値な C^∞-形式 ω が存在して，$\pi^{-1}(W)$ 上で $n \gg 0$ のとき，$c_1(\overline{\mathcal{L}}_n) = \omega$ が成り立つ．

さて，$\{x_m\}$ を $X(\overline{K})$ の元からなる生成的な列で $\lim_{m \to \infty} h(x_m) = 0$ を満たしているとする．このとき，$\pi^{-1}(W)$ 上でカレントとしての次の弱収束が成立する．

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\delta_{\Delta_{x_m}} \wedge \pi^*(c_1(\overline{H}))^d}{\deg(\Delta_{x_m} \to B)} = \left[\frac{\omega^e \wedge \pi^*(c_1(\overline{H}))^d}{\deg(L^e)}\right]$$

4. $\mathbb{Q}$ 上有限生成体上のボゴモロフ予想

これまでの準備のもとで本講演の主定理はウロモ-張の結果 ([9], [11]) の一般化である．以下のボゴモロフ予想の解決である．

定理 4.1. K を $\mathbb{Q}$ 上有限生成な体で，$d = \operatorname{tr.deg}_{\mathbb{Q}}(K)$ とおく．さらに，$\overline{B} = (B, \overline{H})$ を K の偏極とする．A を K 上定義されたアーベル多様体とし，X を $A_{\overline{K}}$ の部分代数多様体とする．また，L を A 上の対称的で豊富な直線束とする．このとき，もし $\overline{H}$ がネフかつビックであるなら以下が成立する．すべての正の数 ϵ に対して，集合

$$\{x \in X(\overline{K}) \mid \hat{h}_L^{\overline{B}}(x) \leq \epsilon\}$$

がザリスキ位相の意味で稠密であるなら，X は $A_{\overline{K}}$ の部分アーベル多様体のねじれ点による平行移動である．

この定理は，ノースコットの定理 (定理 3.3.1) と同程度分布の定理 (定理 3.6.1) を用いて証明される．証明の際，標準的高さ関数の以下のようなアラケォフ幾何的解釈が重要になる．

命題 4.2. K を $\mathbb{Q}$ 上有限生成な体で，$d = \operatorname{tr.deg}_{\mathbb{Q}}(K)$ とおく．さらに，$\overline{B} = (B, \overline{H})$ を K の偏極で，$\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{H})^{d+1}) = 0$ で$\deg(H_{\mathbb{Q}}^d) > 0$ であると仮定する．A を K 上定義された次元が g のアーベル多様体とする．ここで，射影空間への埋め込み$\iota : A \hookrightarrow \mathbb{P}^N_K$ で $L = \iota^*(\mathcal{O}(1))$

が対称的で豊富であるものを固定する．このとき，(A, L) の C^∞-モデルの列 $(\mathcal{A}_n, \overline{\mathcal{L}}_n)$ が存在し次の諸条件を満たす．

(1) B のザリスキ開集合 U が存在して $(\mathcal{A}_n)_U = (\mathcal{A}_1)_U$ がすべての n について成り立ち，$(\mathcal{A}_1)_U \to U$ は U 上のアーベルスキームである．

(2) n が十分大きなとき，$\mathcal{L}_n$ は豊富であり，$\overline{\mathcal{L}}_n$ は垂直的にネフである．

(3) $\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in A(\overline{K})} |\hat{h}_L^{\overline{B}}(x) - h_{(\mathcal{A}_n, \overline{\mathcal{L}}_n)}^{\overline{B}}(x)| = 0.$

(4) $U(\mathbb{C})$ の開集合 W と $(\mathcal{A}_1)_W$ 上の正定値な C^∞-微分形式 ω が存在して，W は非特異であり，$c_1(\overline{H})$ は W 上で正定値であり，かつ，$c_1(\overline{\mathcal{L}}_n) = \omega$ が $(\mathcal{A}_1)_W$ 上で十分大きな n について成立する．

References

[1] H. Gillet and C. Soulé, Arithmetic Intersection Theory, Publ. Math. (IHES), 72 (1990), 93–174.

[2] S. Kawaguchi and A. Moriwaki, Inequalities for semistable families for arithmetic varieties, preprint.

[3] S. Lang, Fundamentals of diophantine geometry, (1983), Springer.

[4] A. Moriwaki, Relative Bogomolov's inequality and the cone of positive divisors on the moduli space of stable curves, J. of AMS, 11 (1998), 569–600.

[5] M. Raynaud, Courbes sur une variété abélienne et points de torsion, Invent. math., 71 (1983), 207–233.

[6] M. Raynaud, Sous-variété d'une variété abélienne et points de torsion, in Arithmetic and Geometry vol.1, (1983).

[7] C. Soulé et al, Lectures on Arakelov Geometry, Cambridge studies in advanced mathematics, 33, Cambridge University Press.

[8] L. Szpiro, E. Ullmo, and S. Zhang, Equirépartition des petits points, Invent. math., 127 (1997), 337-347.

[9] E. Ullmo, Positivité et discétion des points algébriques des courbes, Ann. Math., 147 (1998), 167-179.

[10] S. Zhang, Positive line bundles on arithmetic varieties, J. of AMS., 8 (1995), 187–221.

[11] S. Zhang, Equidistribution of small points on abelian varieties, Ann. Math., 147 (1998), 159-165.

京都大学大学院理学研究科数学教室

E-mail address: `moriwaki@kusm.kyoto-u.ac.jp`